

EAE MAT 2

SESSION 2013

AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES

COMPOSITION D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

A

Rappels et notations.

Les calculatrices et documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés des espaces de Müntz (en tant qu'espaces de Banach) et des fonctions qui appartiennent à ces espaces.

Le problème est constitué de six parties.

La première partie établit divers résultats préliminaires utilisés à partir de la troisième partie. La seconde partie est indépendante de la première.
La troisième partie utilise les deux premières parties. La partie IV est indépendante des parties II et III, exceptée la question 3.a. La partie V n'utilise que des définitions vues dans la partie I. Dans la partie VI, seules les deux dernières questions utilisent des résultats des parties précédentes.

Dans tout le sujet on note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls, $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs, $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbf{R}$ celui des nombres réels et $\mathbf{C}$ celui des complexes muni de sa topologie usuelle.

Dans tout le sujet on considère des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels.

L'espace $C([0,1])$ est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes. Il est muni de la norme uniforme : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

On notera $C(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs complexes, qui sont 2π-périodiques. On munit alors cet espace de la norme $\|f\|_\mathbb{T} = \sup\limits_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)| = \sup\limits_{t\in\mathbf{R}} |f(t)|$.

Pour $k \in \mathbf{Z}$, on définit la fonction e_k sur $\mathbf{R}$ par $\mathrm{e}_k(t) = \mathrm{e}^{ikt}$. On note alors $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{T})$ des polynômes trigonométriques, c'est à dire le sous-espace vectoriel engendré par les e_k où $k \in \mathbf{Z}$.

Le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{T})$ constitué des fonctions paires sera noté $C_P(\mathbb{T})$ et le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $t \mapsto \cos(kt)$ où k décrit $\{0,\dots,N\}$ sera noté Γ_N. Ces espaces sont bien sûr également munis de la norme $\|\cdot\|_\mathbb{T}$.

Pour $f \in C(\mathbb{T})$ et $k \in \mathbf{Z}$, on notera $\widehat{f}(k)$ le k-ième coefficient de Fourier de f : on a ainsi $\widehat{f}(k) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}_k(-t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$.

Dans tout le problème, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ désignera une suite strictement croissante d'entiers naturels. On identifiera abusivement la suite Λ et le sous-ensemble de $\mathbf{N}$ des valeurs de la suite que l'on notera encore Λ.

Pour $\lambda \in \mathbf{N}$, on définit la fonction polynôme ν_λ sur $[0,1]$ par $\nu_\lambda(t) = t^\lambda$. On notera M_Λ l'espace vectoriel engendré par la suite de fonctions $\left(\nu_{\lambda_j}\right)_{j\in\mathbf{N}}$ et on notera $\overline{M_\Lambda}$ l'adhérence de M_Λ dans $C([0,1])$ (muni de la norme uniforme).

Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes. Lorsque $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\prod_{j=0}^{N} z_j$ existe, on la note $\displaystyle\prod_{j=0}^{\infty} z_j$.
Par convention, un produit indexé par l'ensemble vide vaut 1.
On rappelle que $[0,1]$ n'est pas dénombrable : il n'existe pas de bijection de $[0,1]$ sur une partie de $\mathbf{N}$.

Un espace vectoriel normé X est dit séparable s'il existe une suite dense dans X.
Lorsque T est une application linéaire continue entre deux espaces vectoriels normés $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$, on notera simplement $\|T\|$ sa norme : $\|T\| = \displaystyle\sup_{x\neq 0}\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$. Les deux espaces X et Y sont dits isomorphes lorsque il existe une telle application T qui est de plus bijective avec T^{-1} également continue.

On rappelle le **théorème de Banach-Steinhaus** : soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues d'un Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ dans un espace vectoriel normé $(Y, \|.\|_Y)$, telle que pour tout $x \in X$, on ait $\displaystyle\sup_{i\in I}\|T_i(x)\|_Y < \infty$. On a alors $\displaystyle\sup_{i\in I}\|T_i\| < \infty$.

La notation X^* désignera le dual (topologique) d'un espace vectoriel normé X, c'est à dire l'espace des formes linéaires continues sur X. On rappelle (Hahn-Banach) que si X est un sous espace vectoriel de Y (espace vectoriel normé) alors, pour tout $\xi \in X^*$, il existe $\tilde{\xi} \in Y^*$ tel que $\tilde{\xi}_{|X} = \xi$ et $\|\tilde{\xi}\| = \|\xi\|$.

On note c l'espace des suites à termes complexes, convergentes dans $\mathbf{C}$ et c_0 l'espace des suites à termes complexes qui convergent vers 0. Ces deux espaces sont munis de la norme $N_\infty(u) = \displaystyle\sup_{n\in\mathbf{N}}|u_n|$, qui en fait des espaces de Banach. On rappelle que le dual topologique de c_0 est isomorphe à ℓ^1, l'espace des séries absolument convergentes, et que ℓ^1 est séparable.

Lorsque A et B sont deux parties d'un ensemble, on note $A\backslash B$ l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B.

Partie I : Préliminaires.

Les questions 1, 2 et 3 de cette partie sont indépendantes.

1. (a) Montrer que $\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\cos(x)}{x}\,dx$ existe.

Soit $N \in \mathbf{N}$. On définit $D_N = \sum_{k=-N}^{N} e_k$.

(b) Soit $t \in]0, 2\pi[$. Montrer que $D_N(t) = \frac{\sin\left((2N+1)t/2\right)}{\sin\left(t/2\right)}$.

Dans toute la suite du problème, on notera $\mathcal{L}_N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_N(t)|\,dt$.

(c) Montrer que

$$\mathcal{L}_N \geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left|\sin\left((2N+1)x/2\right)\right|}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi(2N+1)} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi(2N+1)} \frac{1-\cos(2x)}{x}\,dx.$$

(d) En déduire qu'il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbf{N}$, $\mathcal{L}_N \geqslant \gamma \ln(N+1)$.

2. On considère une suite décroissante $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge, avec $u_0 = 1$.

(a) Montrer que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Soit s un entier positif non nul, on note $E_s = \left\{ n \in \mathbf{N} \,\middle|\, u_n \geqslant \frac{1}{s} \right\}$.

(b) Montrer que E_s est fini, que son cardinal K_s croît vers l'infini et que $E_s = \{0, \ldots, K_s - 1\}$.

(c) Établir que $\frac{K_s - 1}{2s} \leqslant \frac{1}{K_s}\sum_{n\in E_s} nu_n$.

(d) Conclure que $\lim_{s\to+\infty} \frac{K_s}{s} = 0$.

3. On introduit l'application T de c dans c_0 qui à $u \in c$ associe la suite

$$(l, u_0 - l, \ldots, u_k - l, \ldots)$$

où l est la limite de u.

(a) Montrer que T est bien définie, linéaire et bijective.

(b) Montrer que T et T^{-1} sont continues.

Partie II : Un produit de Blaschke.

1. Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes.

   (a) Montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a

$$\left|\left[\prod_{j=0}^{N}(1+z_j)\right]-1\right| \leqslant \left[\prod_{j=0}^{N}(1+|z_j|)\right]-1.$$

   (b) Montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a

$$\prod_{j=0}^{N}(1+|z_j|) \leqslant \exp\left(\sum_{j=0}^{N}|z_j|\right).$$

2. Soit $(g_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert $U \subset \mathbf{C}$ telle que la série de terme général g_j converge normalement sur tout compact de U. Montrer que la suite de fonctions $(G_N)_{N\in\mathbf{N}}$ définie, pour $z \in U$, par

$$G_N(z) = \prod_{j=0}^{N}\left(1+g_j(z)\right)$$

converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction qui est holomorphe sur U.

Jusqu'à la fin de cette partie II, $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de réels de $]0,1]$ telle que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha_n$ converge.

On note $\Omega_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(z) > -1\}$. Pour $z \in \Omega_1$, on définit

$$f_n(z) = \frac{1-\alpha_n z}{1+\alpha_n z}.$$

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$, on a $|f_n(z)| \leqslant 1$.

   (b) Montrer que la suite de fonctions $z \mapsto \dfrac{2}{(1+z)^2}\displaystyle\prod_{n=0}^{N} f_n(z)$ converge uniformément sur tout compact de Ω_1 vers une fonction F qui est holomorphe sur Ω_1.

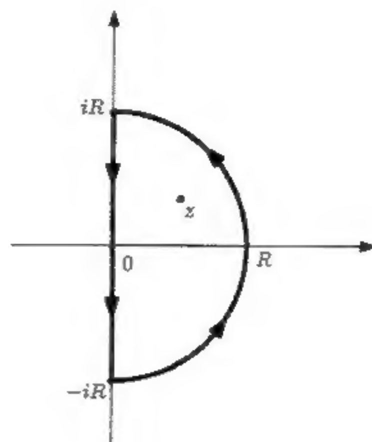
On considère la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(s) = F(is)$.

   (c) Montrer que la fonction φ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

On note $\Omega_0 = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

4. On fixe $z \in \Omega_0$. Justifier que $\qquad F(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{z - is}\,\mathrm{d}s\,.$

Indication : on pourra raisonner avec $R > |z|$ et la réunion du segment $[-iR, iR]$ avec un demi-cercle de centre O et de rayon R passant par R comme sur le schema ci-contre.



5. (a) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, l'intégrale $\mu(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)\mathrm{e}^{-is\ln(x)}\,\mathrm{d}s$ est bien définie et que la fonction $\mu : x \mapsto \mu(x)$ est continue sur $]0,1]$.

(b) Justifier que μ se prolonge par continuité sur $[0,1]$, avec $\|\mu\|_\infty \leqslant 1$.

6. En déduire que pour tout $z \in \Omega_0$, on a $F(z) = \displaystyle\int_0^1 x^{(z-1)}\mu(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie III : Espaces de Müntz et théorème de Clarkson-Erdös.

On rappelle que pour $\lambda \in \mathbf{N}$, la fonction ν_λ est définie par $\nu_\lambda(t) = t^\lambda$ pour $t \in [0,1]$ et que $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ désigne une suite strictement croissante d'entiers que l'on identifie abusivement à son sous-ensemble de valeurs, noté encore Λ.

1. On suppose que $\lambda_0 = 0$ et, dans cette question 1 uniquement, que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge.

Soit $k \in \mathbf{N}\backslash\Lambda$. On pose $Q_0 = \nu_k$ et on définit alors par récurrence, pour $n \in \mathbf{N}$:

$$Q_{n+1}(0) = 0 \quad \text{et, pour } x \in]0,1]\,, \quad Q_{n+1}(x) = (\lambda_{n+1} - k)x^{\lambda_{n+1}} \int_x^1 Q_n(t)t^{-1-\lambda_{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Calculer Q_1 et montrer que $\|Q_1\|_\infty \leqslant \left|1 - \dfrac{k}{\lambda_1}\right|$.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $Q_n - \nu_k$ appartient à l'espace vectoriel engendré par $\nu_{\lambda_1}, \ldots, \nu_{\lambda_n}$.

(c) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $\|Q_n\|_\infty \leqslant \prod_{j=1}^{n} \left|1 - \frac{k}{\lambda_j}\right|$.

(d) En déduire que $\nu_k \in \overline{M_\Lambda}$.

(e) Conclure que $C([0,1]) = \overline{M_\Lambda}$.

On suppose que λ_0 est désormais quelconque (nul ou pas) et, dans toute la suite de cette partie III, que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\lambda_n}$ converge.

Pour $p \in \mathbf{N}$, on note $\rho_p(\Lambda) = \sum_{\substack{\lambda_n > p \\ n \in \mathbf{N}}} \frac{1}{\lambda_n}$.

D'autre part, pour $s \in \mathbf{N}$, on désignera par $N_s(\Lambda)$ le cardinal de l'ensemble des entiers $n \in \mathbf{N}$ tels que $\lambda_n \leqslant s$.

2. (a) Justifier que $\lim_{s \to +\infty} \frac{N_s(\Lambda)}{s} = 0$.

(b) Que vaut $\lim_{p \to +\infty} \rho_p(\Lambda)$? On justifiera la réponse.

3. En utilisant les résultats de la partie II (*on pourra relier* α_n et λ_n), montrer qu'il existe une fonction μ_Λ, continue et bornée par 1 sur $[0,1]$, telle que, pour tout $m \in \mathbf{N}$:

$$\int_0^1 x^m \mu_\Lambda(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(m+2)^2} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n - m}{\lambda_n + m + 2}.$$

4. (a) Montrer que pour tout $P \in M_\Lambda$, on a $\int_0^1 P(x)\,\mu_\Lambda(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(b) En déduire que pour tout $q \in \mathbf{N} \backslash \Lambda$,

$$\inf\left\{\|\nu_q - P\|_\infty \,;\, P \in M_\Lambda\right\} \geqslant \left|\int_0^1 x^q \mu_\Lambda(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

5. Dans cette question 5, on fixe $m \in \mathbf{N}$.

(a) Établir $\sum_{\substack{\lambda_n > 2m \\ n \in \mathbf{N}}} \ln\left(\frac{\lambda_n + m + 2}{\lambda_n - m}\right) \leqslant 4(m+1)\rho_{2m}(\Lambda)$.

On définit $\theta(x) = x \ln\left(\dfrac{3\,\mathrm{e}}{x}\right)$ pour $x > 0$ et $\theta(0) = 0$.

(b) (i) Justifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $k! \geqslant k^k\,\mathrm{e}^{-k}$.

(ii) En déduire que

$$\prod_{\substack{m<\lambda_n\leqslant 2m\\ n\in\mathbf{N}}} \frac{\lambda_n - m}{\lambda_n + m + 2} \geqslant \frac{\widetilde{N}\,!}{(3m+2)^{\widetilde{N}}} \geqslant \exp\Big(-(m+1)\theta\big(\widetilde{N}/(m+1)\big)\Big)$$

où $\widetilde{N} = N_{2m}(\Lambda) - N_m(\Lambda)$.

Pour $m \geqslant 1$, on pose $\widehat{N} = N_{m-1}(\Lambda)$ et on admet que l'on obtient de même la minoration :

$$\prod_{\substack{\lambda_n<m\\ n\in\mathbf{N}}} \frac{m - \lambda_n}{\lambda_n + m + 2} \geqslant \exp\Big(-(m+1)\theta\big(\widehat{N}/(m+1)\big)\Big).$$

6. (a) Prouver l'existence d'une suite $(\gamma_m)_{m\in\mathbf{N}}$ vérifiant $\lim\limits_{m\to+\infty} \gamma_m = 0$ et, pour tout $m \in \mathbf{N}$,

$$\inf\Big\{\|\nu_m - P\|_\infty\ ;\ P \in M_{\Lambda\setminus\{m\}}\Big\} \geqslant \mathrm{e}^{-(m+1)\gamma_m}.$$

(b) En déduire que pour tout $m \in \mathbf{N}\setminus\Lambda$, on a $\nu_m \notin \overline{M_\Lambda}$.

7. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\beta_\varepsilon > 0$ (qui ne dépend que de ε et de Λ) tel que pour tout $P \in M_\Lambda$ et tout $k \in \mathbf{N}$:

$$|a_k| \leqslant \beta_\varepsilon (1+\varepsilon)^{\lambda_k} \|P\|_\infty$$

où P s'écrit $\sum\limits_{i\in\mathbf{N}} a_i \nu_{\lambda_i}$ (avec tous les a_i nuls à partir d'un certain rang).

Indication : on pourra appliquer la question 6.(a) avec $m = \lambda_k$.

Soit $f \in \overline{M_\Lambda}$, limite d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de M_Λ où, pour chaque $n \in \mathbf{N}$, le polynôme P_n s'écrit $\sum\limits_{i\in\mathbf{N}} a_{n,i} \nu_{\lambda_i}$ (avec pour tout $n \in \mathbf{N}$, les $a_{n,i}$ nuls à partir d'un certain rang en i).

(b) Montrer que pour i fixé, la suite $(a_{n,i})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un nombre complexe a_i.

(c) En déduire que pour tout $x \in [0,1[$, on a $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i x^{\lambda_i}$.

8. **Théorème de Clarkson-Erdős :**

(a) Soit $f \in C([0,1])$. Pour $r \in [0,1[$, on définit $f_r \in C([0,1])$ par $f_r(t) = f(rt)$ pour tout $t \in [0,1]$. Montrer que $\lim\limits_{\substack{r\to1\\ r<1}} \|f_r - f\|_\infty = 0$.

(b) Prouver que $\overline{M_\Lambda}$ est exactement l'espace des fonctions f, continues sur $[0,1]$, telles qu'il existe une suite de nombres complexes $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ vérifiant

$$\forall x \in [0,1[\,, \qquad f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^{\lambda_i}.$$

Partie IV : Être ou ne pas être à dual séparable.

1. Soient $S = [a,b]$ un segment (avec $a < b$) de $[0,1]$ et V un sous-espace vectoriel fermé de $C([0,1])$ tel que toute fonction de V est de classe C^1 sur S.

Pour $(x,y) \in S^2$ avec $x \neq y$, on pose $\xi_{x,y}(f) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ où $f \in V$.

(a) Justifier que $\xi_{x,y} \in V^*$.

(b) Démontrer que pour tout $f \in V$, on a

$$\sup_{\substack{x,y\in S\\ x\neq y}} \left|\xi_{x,y}(f)\right| < +\infty\,.$$

(c) En déduire qu'il existe $\mathcal{N}(S) > 0$ vérifiant, pour tout $f \in V$ et tout $(x,y) \in S^2$:

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \mathcal{N}(S)\left|x - y\right|.\|f\|_\infty\,.$$

(d) Soit $(t_l)_{0\leqslant l\leqslant L}$ une suite finie de points de S tels que $0 < t_{l+1} - t_l \leqslant \dfrac{1}{\mathcal{N}(S)}$ pour $0 \leqslant l < L$, vérifiant aussi $t_0 = a$ et $t_L = b$. Montrer que

$$\forall f \in V\,, \qquad \sup_{t\in S}\left|f(t)\right| \leqslant \sup_{0\leqslant l\leqslant L}\left|f(t_l)\right| + \frac{1}{2}\|f\|_\infty.$$

2. Soit F_0 un sous-espace vectoriel fermé de $C([0,1])$ tel que toute fonction de F_0 est de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. Montrer que F_0 est de dimension finie.

3. Soit X_0 un sous-espace vectoriel fermé de $C([0,1])$ tel que toute fonction de X_0 est de classe C^1 sur l'intervalle $[0,1[$.

(a) Donner un exemple d'un tel espace X_0 de dimension infinie.

Indication : on pourra appliquer les résultats de la partie III.

On fixe une suite $(a_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de $[0,1[$, strictement croissante vers 1, ainsi qu'une suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $[0,1]$, strictement croissante vers 1 et une suite d'entiers $(n_j)_{j\in\mathbf{N}}$ strictement croissante vers l'infini telles que $s_0 = a_0 = 0$ et

$$\forall j \in \mathbf{N}, \quad s_{n_j} = a_j \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \{n_j, \ldots, n_{j+1}-1\}, \qquad s_{n+1} - s_n \leqslant \frac{1}{\mathcal{N}\big([a_j, a_{j+1}]\big)}.$$

(b) Soit $J : \left| \begin{array}{ccc} X_0 & \longrightarrow & c \\ f & \longmapsto & \big(f(s_n)\big)_{n\in\mathbf{N}} \end{array} \right.$

Montrer que l'application J est bien définie et satisfait : $\|f\|_\infty \leqslant 2N_\infty(J(f)) \leqslant 2\|f\|_\infty$ pour tout $f \in X_0$.

(c) En déduire que X_0 est isomorphe à un sous-espace de c puis que X_0 est isomorphe à un sous-espace Z_0 de c_0.

(d) Justifier que X_0^* est isomorphe à Z_0^* puis en déduire que X_0^* est séparable.

Indication : on pourra notamment s'appuyer sur le théorème de Hahn-Banach.

4. On souhaite montrer par l'absurde que $C([0,1])^*$ n'est pas séparable. On suppose l'existence d'une suite $(\omega_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dense dans $C([0,1])^*$.

Pour $x \in [0,1]$ et $f \in C([0,1])$, on note $\delta_x : f \mapsto f(x)$, l'évaluation de f en x.

(a) Justifier que $\delta_x \in C([0,1])^*$ et que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ avec $x \neq y$, on a

$$\|\delta_x - \delta_y\|_{C([0,1])^*} = 2.$$

Soit χ l'application qui à $x \in [0,1]$ associe un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que $\|\delta_x - \omega_n\|_{C([0,1])^*} < 1$.

(b) Justifier que l'on définit ainsi une application injective χ de $[0,1]$ dans $\mathbf{N}$, puis conclure.

Partie V : Normes de projections.

Soit $N \in \mathbf{N}$.

1. Pour $x \in \mathbf{R}$ et $f \in C_P(\mathbb{T})$, on définit : $\quad \Phi_N(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} D_N(x-t)f(t)\,dt.$

(a) Montrer que l'on définit ainsi une projection Φ_N de $C_P(\mathbb{T})$ sur Γ_N.

(b) Montrer que $\|\Phi_N\| = \mathcal{L}_N$.

On associe à $f \in C(\mathbb{T})$ la fonction $\check{f} \in C(\mathbb{T})$ définie par $\check{f}(t) = f(-t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, et $\Psi(f) = \dfrac{1}{2}(f + \check{f}) \in C_P(\mathbb{T})$.

2. Soit P une projection continue de $C_P(\mathbb{T})$ sur Γ_N. L'application $\widetilde{P} = P \circ \Psi$ est donc définie sur $C(\mathbb{T})$. Pour $a \in \mathbf{R}$, on définit l'endomorphisme τ_a de $C(\mathbb{T})$, pour $f \in C(\mathbb{T})$ et $t \in \mathbf{R}$ par, $\tau_a(f)(t) = f(t+a) + f(t-a)$.

(a) Montrer que pour tout $f \in C(\mathbb{T})$ et tout $x \in \mathbf{R}$, l'intégrale

$$Q(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\widetilde{P}(\tau_y(f))\right)(x-y)\,\mathrm{d}y$$

est bien définie.

(b) Justifier que pour tout $f \in \mathcal{T}$, on a : $\quad Q(f) = \widehat{f}(0) + \Phi_N \circ \Psi(f)$.

(c) En déduire que $2\|P\| + 1 \geqslant \mathcal{L}_N$.

3. Soit $\mathcal{R}$ une projection continue de $C([0,1])$ sur l'espace des fonctions polynômes de degré au plus N, c'est à dire l'espace vectoriel engendré par $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_N$. Montrer que l'on a $2\|\mathcal{R}\| + 1 \geqslant \mathcal{L}_N$.

Indication : on pourra considérer $\rho(x) = \dfrac{1+\cos(x)}{2}$ *et l'application qui à un polynôme h de degré au plus N associe $h \circ \rho \in \Gamma_N$.*

4. Soient m, n deux entiers strictement positifs et $\mathcal{R}$ une projection continue de $C([0,1])$ sur l'espace vectoriel engendré par les fonctions polynômes $\nu_0, \nu_n, \nu_{2n}, \ldots, \nu_{mn}$. Montrer que l'on a $2\|\mathcal{R}\| + 1 \geqslant \mathcal{L}_m$.

Partie VI : Un exemple dû à D. Newman.

L'objet de cette partie est de construire un espace de Müntz non complémenté dans $C([0,1])$.

1. Soit $d \geqslant 1$ un entier. Prouver l'existence d'un réel $\Delta(d) \geqslant d$ tel que, pour tout polynôme P de degré au plus d :

$$\|P'\|_\infty \leqslant \Delta(d)\|P\|_\infty.$$

2. Soient $n > m \geqslant 1$ et P et Q des polynômes de degré au plus m avec $Q(0) = 0$.

(a) On suppose que $P(X) + Q(X^n) = 0$. Montrer que $P = 0$.

(b) On suppose que $\|P(X) + Q(X^n)\|_\infty = 1$. Soit $x_n = 1 - \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Tournez la page S.V.P.

(i) Montrer que pour tout $x \in [0, x_n]$, on a

$$|P(x)| \leqslant 1 + \frac{\Delta(m)}{n}(1 + \|P\|_\infty).$$

(ii) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$|P(x)| \leqslant \Delta(m)\frac{\ln(n)}{n}\|P\|_\infty + 1 + \frac{\Delta(m)}{n}(1 + \|P\|_\infty).$$

(c) Conclure que

$$\|P(X) + Q(X^n)\|_\infty \geqslant \left(1 - \Delta(m)\frac{2 + \ln(n)}{n}\right)\|P\|_\infty .$$

On admet l'existence d'une suite d'entiers naturels (non nuls) vérifiant la condition de récurrence :

$$n_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{n_{j+1}}{2 + \ln(n_{j+1})} \geqslant (j+1)^2 \Delta(j n_j) \quad \text{où } j \geqslant 1.$$

On admet que l'on a pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, $n_{j+1} > j n_j$. On note dans la suite de cette partie

$$\Lambda = \{0\} \cup \bigcup_{m \geqslant 1} n_m\{1, \ldots, m\} = \left\{0, n_1, n_2, 2n_2, n_3, 2n_3, 3n_3, n_4, \ldots\right\}.$$

3. Soit $(P_j)_{j \geqslant 1}$ une suite de polynômes tels que, pour tout $j \geqslant 1$, $P_j(0) = 0$ et P_j est de degré au plus j. On note pour $j \geqslant 1$:

$$S_j(X) = \sum_{i=1}^{j} P_i(X^{n_i}).$$

Montrer que pour tous $k \geqslant j \geqslant 1$, on a $\|S_k\|_\infty \geqslant \dfrac{k+1}{2k}\|S_j\|_\infty$.

4. Établir que, pour tout $f \in \overline{M_\Lambda}$, il existe une unique suite $(P_j)_{j \geqslant 1}$ de polynômes tels que, pour tout $j \geqslant 1$, $P_j(0) = 0$ et P_j est de degré au plus j, vérifiant

$$\forall x \in [0,1[, \qquad f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x^{n_i})$$

et (avec les notations précédentes) pour tout $j \geqslant 1$,

$$\|S_j\|_\infty \leqslant 2\|f - f(0)\|_\infty.$$

5. Conclure qu'il n'existe aucune projection continue de $C([0,1])$ sur $\overline{M_\Lambda}$.